

Normalformen von Schaltfunktionen

Disjunktive Normalform (DNF)

Vorgehen:

1. Eindeutige Beschreibung der Steuerungsaufgabe mit einer Funktionstabelle
2. Aussuchen der Zeilen, in denen die Ausgangsvariable den Zustand „1“ hat

| Zeilen | B3 | B2 | B1 | M1 |
|--------|----|----|----|----|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 02 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 03 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 04 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 05 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 06 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 07 | 1 | 1 | 1 | 1 |

3. Die Eingangsvariablen einer Zeile werden UND-verknüpft
 - a. Variablen mit Zustand „1“ werden nicht negiert angeschrieben
 - b. Variablen mit Zustand „0“ werden negiert angeschrieben

Eine solche UND-Verknüpfung wird als „Minterm“ bezeichnet.

4. Alle Minterme werden nun ODER-verknüpft

→ Disjunktive Normalform (DNF) bzw. UND-vor-ODER-Normalform

$$M1 = \overline{B3} * B2 * B1 + B3 * \overline{B2} * B1 + B3 * B2 * \overline{B1} + B3 * B2 * B1$$

Konjunktive Normalform (KNF)

Vorgehen:

1. Eindeutige Beschreibung der Steuerungsaufgabe mit einer Funktionstabelle
2. Aussuchen der Zeilen, in denen die Ausgangsvariable den Zustand „0“ hat

| Zeilen | B3 | B2 | B1 | M1 |
|--------|----|----|----|----|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 02 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 03 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 04 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 05 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 06 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 07 | 1 | 1 | 1 | 1 |

3. Die Eingangsvariablen einer Zeile werden ODER-verknüpft
 - a. Variablen mit Zustand „1“ werden negiert angeschrieben
 - b. Variablen mit Zustand „0“ werden nicht negiert angeschrieben

Eine solche UND-Verknüpfung wird als „Maxterm“ bezeichnet.

4. Alle Maxterme werden nun UND-verknüpft

→ Konjunktive Normalform (KNF) bzw. ODER-vor-UND-Normalform

$$M1 = (B3 + B2 + B1) * (B3 + B2 + \overline{B1}) * (B3 + \overline{B2} + B1) * (\overline{B3} + B2 + B1)$$

Aufgabe:

Vereinfachen Sie die aufgestellte KNF der 2-aus-3-Auswahl mit Hilfe der Booleschen Algebra.

Übungsaufgabe

1. Gesucht sei eine Schaltfunktion für die boolesche Funktion mit drei Variablen E1, E2 und E3, deren Ausgang A genau dann den Wert TRUE annimmt, wenn die Dualzahl $[E3 E2 E1]_2$ eine Primzahl ist.
 - a. Ermitteln Sie die DNF der Funktion.
 - b. Vereinfachen Sie die DNF der Funktion so weit wie möglich.
 - c. Erstellen Sie die KNF der Funktion.
 - d. Vereinfachen Sie die KNF der Funktion so weit wie möglich.
 - e. Überprüfen Sie ob die beiden vereinfachten Terme aus DNF und KNF zum gleichen Resultat führen.

Normalformen von Schaltfunktionen

Disjunktive Normalform (DNF)

Vorgehen: [am Beispiel der 2-aus-3-Auswahl](#)

1. Eindeutige Beschreibung der Steuerungsaufgabe mit einer Funktionstabelle
2. Aussuchen der Zeilen, in denen die Ausgangsvariable den Zustand „1“ hat

| Zeilen | B3 | B2 | B1 | M1 |
|--------|----|----|----|----|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 02 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 03 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 04 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 05 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 06 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 07 | 1 | 1 | 1 | 1 |

3. Die Eingangsvariablen einer Zeile werden UND-verknüpft
 - a. Variablen mit Zustand „1“ werden nicht negiert angeschrieben
 - b. Variablen mit Zustand „0“ werden negiert angeschrieben

Eine solche UND-Verknüpfung wird als „Minterm“ bezeichnet.

Minterm, weil es genau eine Kombination an Eingangssignalen gibt, die einen „1“-Zustand am Ausgang liefert. Nämlich eine.

4. Alle Minterme werden nun ODER-verknüpft

➔ Disjunktive Normalform (DNF) bzw. UND-vor-ODER-Normalform

$$M1 = \overline{B3} * B2 * B1 + B3 * \overline{B2} * B1 + B3 * B2 * \overline{B1} + B3 * B2 * B1$$

Die Vereinfachung dieser Gleichung mit Hilfe der Booleschen Algebra wird von den Schülern mit der Einführung des KV-Diagramms verlangt ➔ deshalb hier noch nicht ansprechen!

Konjunktive Normalform (KNF)

Vorgehen: am Beispiel der 2-aus-3-Auswahl

1. Eindeutige Beschreibung der Steuerungsaufgabe mit einer Funktionstabelle
2. Aussuchen der Zeilen, in denen die Ausgangsvariable den Zustand „0“ hat

| Zeilen | B3 | B2 | B1 | M1 |
|--------|----|----|----|----|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 02 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 03 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 04 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 05 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 06 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 07 | 1 | 1 | 1 | 1 |

3. Die Eingangsvariablen einer Zeile werden ODER-verknüpft
 - a. Variablen mit Zustand „1“ werden negiert angeschrieben
 - b. Variablen mit Zustand „0“ werden nicht negiert angeschrieben

Eine solche UND-Verknüpfung wird als „Maxterm“ bezeichnet.

Maxterm, weil es eine maximale Anzahl an Kombination der Eingangssignalen gibt, die einen „1“-Zustand am Ausgang liefern (und nur eine Kombination, die eine „0“ am Ausgang liefert).

Der Maxterm $\overline{E3} + E2 + E1$ liefert nur für die Kombination $E3 = 1, E2 = 0$ und $E1 = 0$ am Ausgang den Zustand „0“, bei allen anderen Eingangskombinationen eine „1“.

4. Alle Maxterme werden nun UND-verknüpft

→ Konjunktive Normalform (KNF) bzw. ODER-vor-UND-Normalform

$$M1 = (B3 + B2 + B1) * (B3 + B2 + \overline{B1}) * (B3 + \overline{B2} + B1) * (\overline{B3} + B2 + B1)$$

Um Verwechslungen auszuschließen wird von mir – soweit nicht anders angegeben – nur die DNF verwendet (ich finde, dass diese intuitiver aus der Funktionstabelle abzulesen ist).

Aufgabe:

Vereinfachen Sie die aufgestellte KNF der 2-aus-3-Auswahl mit Hilfe der Booleschen Algebra.

$$M1 = (B3 + B2) + (B1 * \overline{B1}) * (B3 + B1) + (B2 * \overline{B2}) * (B2 + B1) + (B3 * \overline{B3})$$

$$M1 = (B3 + B2) + (0) * (B3 + B1) + (0) * (B2 + B1) + (0)$$

$$M1 = (B3 + B2) * (B3 + B1) * (B2 + B1)$$

Überprüfung des Ergebnis, indem alle Kombinationen in der Funktionstabelle gesucht werden (z. B. $B3 * B3 * B2, B3 * B3 * B1, B3 * B1 * B2, B3 * B1 * B1, B2 * B3 * B2, B2 * B3 * B1, \dots$)

Übungsaufgabe

1. Gesucht sei eine Schaltfunktion für die boolesche Funktion mit drei Variablen E1, E2 und E3, deren Ausgang A genau dann den Wert TRUE annimmt, wenn die Dualzahl $[E3 E2 E1]_2$ eine Primzahl ist. Zahl „1“ ist per Definition keine Primzahl!
 - a. Ermitteln Sie die DNF der Funktion.
 - b. Vereinfachen Sie die DNF der Funktion so weit wie möglich.
 - c. Erstellen Sie die KNF der Funktion.
 - d. Vereinfachen Sie die KNF der Funktion so weit wie möglich.
 - e. Überprüfen Sie ob die beiden vereinfachten Terme aus DNF und KNF zum gleichen Resultat führen.

Lösung:

| Zeilen | E3 | E2 | E1 | A |
|--------|----|----|----|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 02 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 03 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 04 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 05 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 06 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 07 | 1 | 1 | 1 | 1 |

DNF:
$$A = (\overline{E3} * E2 * \overline{E1}) + (\overline{E3} * E2 * E1) + (E3 * \overline{E2} * E1) + (E3 * E2 * E1)$$

Vereinfachte DNF:
$$A = (\overline{E3} * E2) * (\overline{E1} + E1) + (E3 * E1) * (\overline{E2} + E2)$$

$$A = (\overline{E3} * E2) * (1) + (E3 * E1) * (1)$$

$$A = (\overline{E3} * E2) + (E3 * E1)$$

KNF:
$$A = (E3 + E2 + E1) * (E3 + E2 + \overline{E1}) * (\overline{E3} + E2 + E1) * (\overline{E3} + \overline{E2} + E1)$$

Vereinfachte KNF:
$$A = [(E3 + E2) + (E1 * \overline{E1})] * [(\overline{E3} + E1) + (E2 * \overline{E2})]$$

$$A = [(E3 + E2) + (0)] * [(\overline{E3} + E1) + (0)]$$

$$A = (E3 + E2) * (\overline{E3} + E1)$$

Überprüfung anhand Funktionstabelle zeigt, dass beide das gleiche Resultat liefern.

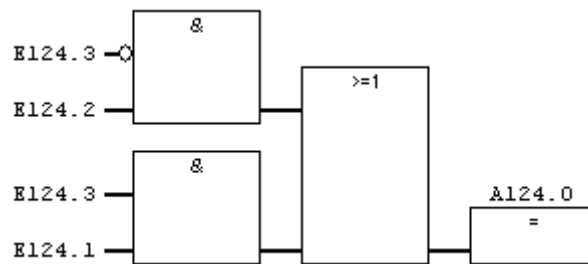
Realisierungsmöglichkeiten in STEP7:

• AWL: z. B. in OB1
 O(
 UN E 124.3
 U E 124.2
)
 O(
 U E 124.3
 U E 124.1
)
 = A 124.0

Besser: z. B. in FC10
 Variablendeklaration:
 IN: E1, E2, E3 : BOOL
 OUT: A : BOOL
 O(
 UN #E3
 U #E2
)
 O(
 U #E3
 U #E1
)
 = #A

Im OB1:
 CALL FC10
 E1 := E124.1
 E2 := E124.2
 E3 := E124.3
 A := A124.0

• FUP:



• SCL: Aufruf:
 CALL FC 10
 E1 :=E124.1
 E2 :=E124.2
 E3 :=E124.3
 A :=A124.0

SCL-Quelle:
 FUNCTION FC10 : void
 VAR_INPUT
 E1, E2, E3:BOOL;
 END_VAR
 VAR_OUTPUT
 A:BOOL;
 end_var
 // Anweisungsteil
 A:=(NOT E3 AND E2) OR (E3 AND E1);
 END_FUNCTION